EJERCICIOS RESUELTOS DE SELECTIVIDAD DE P.A.U. ANDALUCÍA

IES TRASSIERRA – CÓRDOBA Prof. Francisco Luque Ruiz

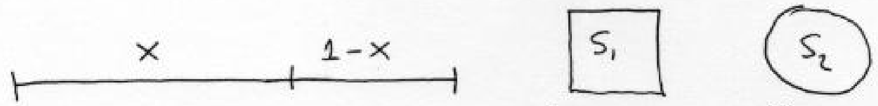
Telf: 957 734900 e-mail: pluque@iestrassierra.com

Año: 2001 Modelo: 5 Opción: A Nº: 2, Valor: 2,5 Ptos.

Resuelto por: Joaquín Mateos Cobacho

Enunciado:

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Un hilo de alambre de 1 m. de longitud se corta en dos trozos formando con uno de ellos una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.



$l = \frac{x}{4}$ $\qquad$ $l = 2\pi r = 1 - x$

$r = \frac{1-x}{2\pi}$

$$S_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$$

$$S_2 = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 = \cancel{\pi}\left(\frac{x^2-2x+1}{4\pi^{\cancel{2}}}\right) = \frac{x^2-2x+1}{4\pi}$$

La función a optimizar es la suma de las áreas:

$$g(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2-2x+1}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4x^2 - 8x + 4}{16\pi}$$

$$g'(x) = \frac{(2\pi x + 8x - 8)(\cancel{16\pi}) - 0}{(16\pi)^{\cancel{2}}} = \frac{2\pi x + 8x - 8}{16\pi}$$

$$g'(x) = 0 \; ; \; \frac{2\pi x + 8x - 8}{16\pi} = 0 \; ; \; 2\pi x + 8x - 8 = 0 \; ; \; x(2\pi + 8) = 8 \; ;$$

$$g'(x) = 0 \; ; \; x = \frac{8}{8+2\pi} = \frac{4}{4+\pi} \Rightarrow \text{Máximo o mínimo}$$

$$g''(x) = \frac{(2\pi+8)(\cancel{16\pi})}{(16\pi)^{\cancel{2}}} = \frac{2\pi+8}{16\pi} > 0 \Rightarrow \text{Es un mínimo}$$

Con el valor de x calculado obtenemos el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia y comprobamos la hipótesis del enunciado, esto es: el lado del cuadrado debe ser el doble del radio de la circunferencia:

Cuadrado: $l = \frac{x}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4+\pi} = \frac{1}{4+\pi}$

Radio de la circunferencia: $r = \frac{1-x}{2\pi} = \frac{1-\frac{4}{4+\pi}}{2\pi} \cdot= \frac{\frac{4+\pi-4}{4+\pi}}{2\pi} = \frac{\pi}{(4+\pi)\cdot 2\pi} = \frac{1}{(4+\pi)\cdot 2}$, que es claramente la mitad del lado del cuadrado, como proponía el enunciado.